

Ivana MARTINICKÁ<sup>1</sup>

ANALÝZA KRITICKÝCH RÝCHLOSTI VOZIDLA PRI POHYBE PO PERIODICKY  
SA OPAKUJÚCICH NEROVNOSTIACH

ANALYSIS OF CRITICAL VELOCITIES OF VEHICLE AT THE MOVEMENT  
ALONG PERIODICALLY REPEATED UNEVENNESS

**Abstrakt**

Nerovnosti povrchu jazdnej dráhy sú hlavným zdrojom kinematického budenia vozidla. Z praktického hľadiska patrí významné miesto periodicky sa opakujúcim nerovnostiam. Existujú určité kritické rýchlosti pohybu vozidla pri ktorých dochádza k zvýšeniu dynamických účinkov, respektíve ku vzniku rezonančného kmitania určitých častí vozidla. Analýzou takýchto možností sa zaoberá predkladaný príspevok.

**Abstract**

Road unevenness represents the main source of kinematical excitation of vehicle. From the practical point of view the responsible position belongs to the periodically repeated unevenness. There are some critical speeds of vehicle motion by which the increased dynamical effects occur respectively the resonance vibration of certain parts of vehicle originates. This paper is dedicated to the analysis of such cases.

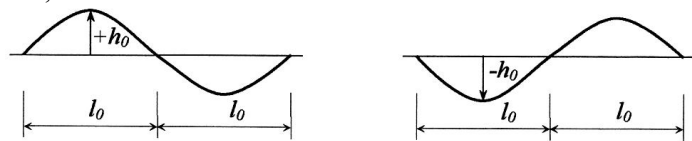
**1 ÚVOD**

Nerovnosti povrchu jazdnej dráhy, ktoré sú hlavným zdrojom kinematického budenia vozidla, je možné charakterizovať ako odchýlky malej hodnoty medzi skutočným a stredným profilom jazdnej dráhy. Klasifikácia výškových nerovností na pozemných komunikáciách bola prijatá na XVIII. cestnom svetovom kongrese v Bruseli v roku 1987 [1], [2]. Nerovnosti je možné klasifikovať z rôznych hľadísk, napríklad z hľadiska orientácie k pozdĺžnej osi komunikácie (priechne, pozdĺžne), z hľadiska veľkosti (mikronerovnosti, makronerovnosti) alebo z hľadiska tvaru (periodicky sa opakujúce, miestne osamelé, náhodne premenné).

Z praktického hľadiska významné miesto patrí periodicky sa opakujúcim nerovnostiam, nakoľko pri určitých kritických rýchlostiach pohybu vozidla dochádza k zvýšeniu dynamických účinkov na vozidlo, respektíve k vzniku rezonančného kmitania určitých častí vozidla. Z hľadiska vzniku rezonančných javov nie je ani tak dôležitý tvar nerovností, ako frekvencia ich výskytu.

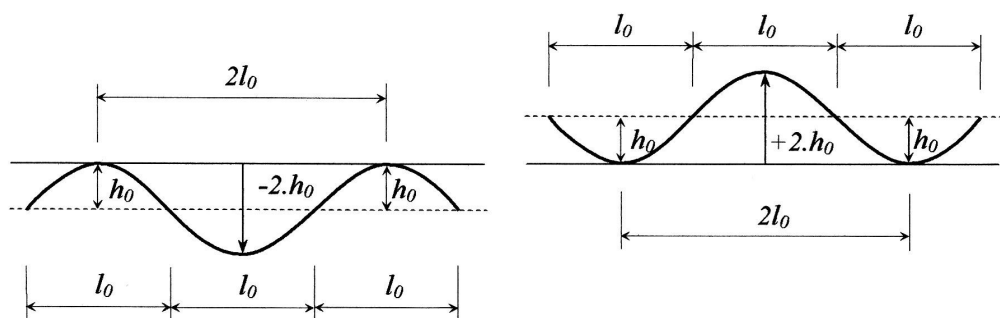
**2 KONTAKT KOLESA S VOZOVKOU**

Periodicky sa opakujúce nerovnosti je možné približne aproximovať sínusovými alebo kosínusovými vlnami, obrázok 1 a 2.



**Obr. 1** Periodicky sa opakujúce nerovnosti v tvare sínusových vln

<sup>1</sup> Ing. Ivana Martinická, PhD., Fakulta stavebná, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: (+421) 41 513 5612, e-mail: ivana.martinicka@fstav.uniza.sk .



**Obr. 2** Periodicky sa opakujúce nerovnosti v tvare kosínusových vĺn

Takéto vlny je možné matematicky popísať nasledovnými matematickými vzťahmi:

$$h(x) = \pm h_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l_0}\right), \text{ respektíve } h(t) = \pm h_0 \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (1)$$

$$h(x) = \pm \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h_0 \cdot (1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot l_0}\right)) = \pm h_0 \cdot (1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{l_0}\right)), \text{ respektíve}$$

$$h(t) = \pm h_0 \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)). \quad (2)$$

V predchádzajúcich vzťahoch je použité nasledovné označenie

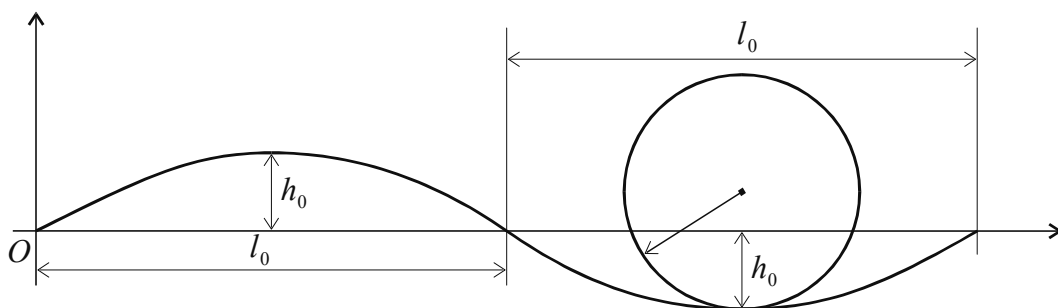
$$x = c \cdot t, \quad \omega = \pi \cdot c / l_0, \quad (3)$$

kde  $h_0$  je výška sínusovej polovlny v [m],  $l_0$  je dĺžka sínusovej polovlny v [m],  $x$  je dĺžková súradnica v [m] a  $t$  je časová súradnica v [s],  $c$  je rýchlosť pohybu vozidla v [m/s],  $\omega$  je uhlová frekvencia v [rad.s<sup>-1</sup>].

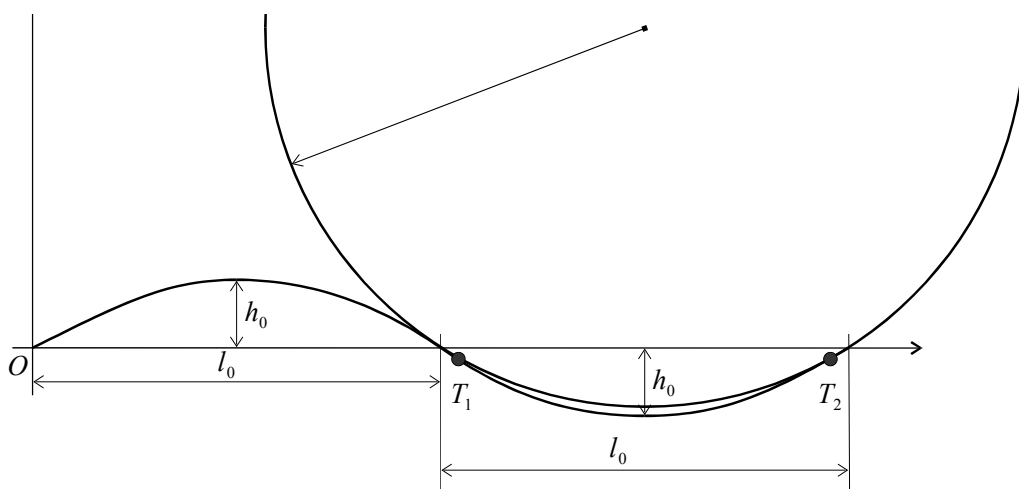
Aby koleso s polomerom  $r$  mohlo kopírovať jazdnú dráhu a nastával teoreticky len jednobodový dotyk, tak ako je to zobrazené na obrázok 3, a nie dvojbodový dotyk, ako je to zobrazené na obrázok 4, musia byť podľa [3] medzi parametrami  $r$ ,  $h_0$ ,  $l_0$  dodržané určité vzájomné relácie. Pri danom polomere kolesa  $r$  a výške nerovnosti  $h_0$  musí platiť, že

$$l_0 \geq \pi \cdot \sqrt{h_0 \cdot r}. \quad (4)$$

Pre polomer kolesa  $r = 0,5$  m, zodpovedajúci polomeru kolesa bežne sa vyskytujúcich nákladných automobilov, sú pre rôzne výšky nerovnosti  $h_0$  limitné hodnoty dĺžky sínusovej polovlny  $l_0$  uvedené v tabuľke 1.



**Obr. 3** Jazdná dráha, umožňujúca jednobodový dotyk pri odvažovaní kolesa



**Obr. 4** Jazdná dráha, neumožňujúca jednobodový dotyk pri odvaľovaní kolesa

**Tab. 1** Limitné hodnoty dĺžky sínusovej polovlny  $l_0$  pri známej hodnote  $r$  a  $h_0$

$r$ [m]	$h_0$ [m]	$l_0$ [m]
0,5	0,005	0,15707
	0,010	0,22214
	0,015	0,27207
	0,020	0,31415
	0,025	0,35124
	0,030	0,38476
	0,035	0,41559
	0,040	0,44428
	0,045	0,47124
	0,050	0,49672

### 3 KRITICKÉ RÝCHLOSTI POHYBU VOZIDLA

Doba prejazdu nápravy vozidla po jednej sínusovej vlne sa dá vyjadriť vzťahom

$$T = (2 \cdot l_0) / c = (2 \cdot l_0 \cdot 3,6) / V, \quad (5)$$

kde  $c$  je rýchlosť pohybu vozidla v [m/s] a  $V$  je rýchlosť pohybu vozidla v [km/h]. Potom frekvencia pohybu vozidla na nerovnosti je

$$f = 1/T = c / (2 \cdot l_0) = V / (2 \cdot l_0 \cdot 3,6) \quad (6)$$

a jej zodpovedajúca uhlová frekvencia

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = (\pi \cdot c) / l_0 = (\pi \cdot V) / (3,6 \cdot l_0). \quad (7)$$

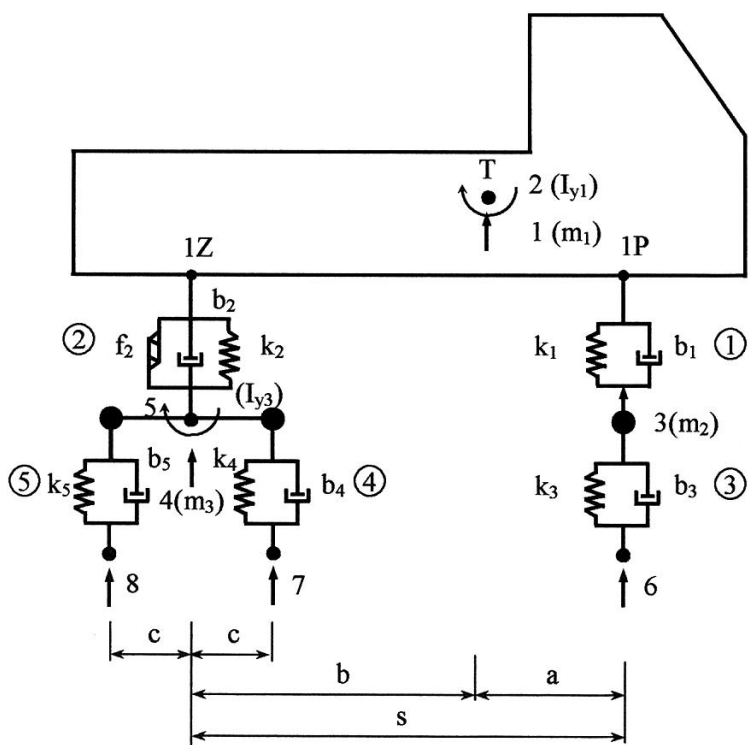
Ku každej dĺžke  $l_0$  sínusovej polovlny nerovnosti existuje určitá kritická rýchlosť  $V$  pohybu vozidla, kedy dochádza k zvýšeniu dynamických účinkov na vozidlo, respektíve k vzniku rezonančného kmitania určitých častí vozidla. Závislosť možno odvodiť zo vzťahu

$$\omega = \omega_{(j)}, \text{ pre } j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (8)$$

kde  $\omega_{(j)}$  je uhlová frekvencia kmitania vozidla v  $j$ -tom vlastnom tvare. Dosadením za  $\omega$  podľa vzťahu (7) do vzťahu (8) vychádza pre kritické rýchlosti  $V_{(j)}$

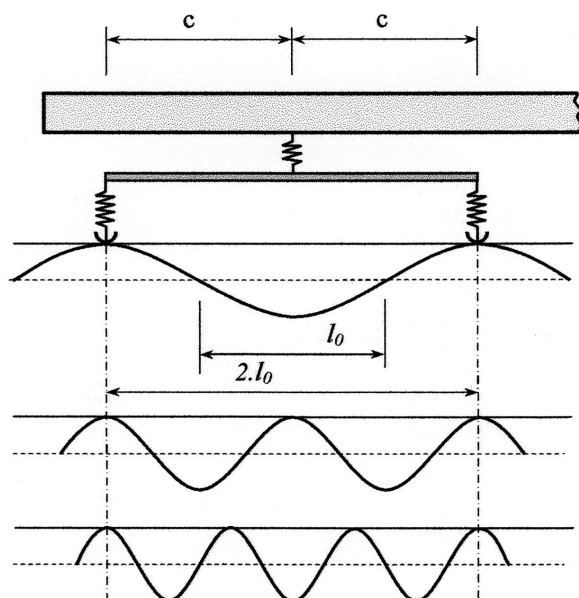
$$V_{(j)} = (3,6 \cdot l_0 / \pi) \cdot \omega_{(j)}. \quad (9)$$

Pre analýzu kritických rýchlostí bol uvažovaný polovičný model vozidla z obrázka 5. Periodicky sa opakujúce nerovnosti boli volené v takých rozmeroch, aby umožňovali vznik zvýšených dynamických účinkov na vozidlo, respektíve vznik rezonančného kmitania určitých častí vozidla. Kritické rýchlosti pohybu vozidla  $V_{(j)}$  boli vypočítané vzhľadom na teoreticky stanovené hodnoty vlastných uhlových frekvencií  $\omega_{(j)}$ , ktoré boli pre polovičný výpočtový model plne naloženého vozidla z obrázka 5 vypočítané numerickou cestou. Uvažovali sa periodicky sa opakujúce nerovnosti v tvare kosínusových vln s hodnotou výšky kosínusovej vlny  $2 \cdot h_0 = -2,0,010 = -0,020$  m, čomu zodpovedá limitná dĺžka kosínusovej vlny  $2 \cdot l_0 = 2,0,22214 = 0,44428$  m. Vytipovali sa 4 základné prípadové štúdie.



**Obr. 5** Rovinný výpočtový model vozidla

1. prípadová štúdia (PŠ1) predpokladá, že dĺžky kosínusových vln sú rovné podielom vzdialenosti kolies zadnej dvojnápravy vozidla  $2 \cdot c = 2,0,66 = 1,32$  m, čo by mohlo vyvolať vznik zvýšených dynamických účinkov na vozidlo, respektíve vznik rezonančného kmitania zadnej dvojnápravy vozidla vo vertikálnom smere, obrázok 6. Číselné hodnoty možných dĺžok kosínusových vln  $2 \cdot l_0$ , hodnoty vlastných uhlových frekvencií  $\omega_{(j)}$  a im zodpovedajúce hodnoty kritických rýchlostí  $V_{(j)}$  pre tento prípad sú v tabuľke 2.

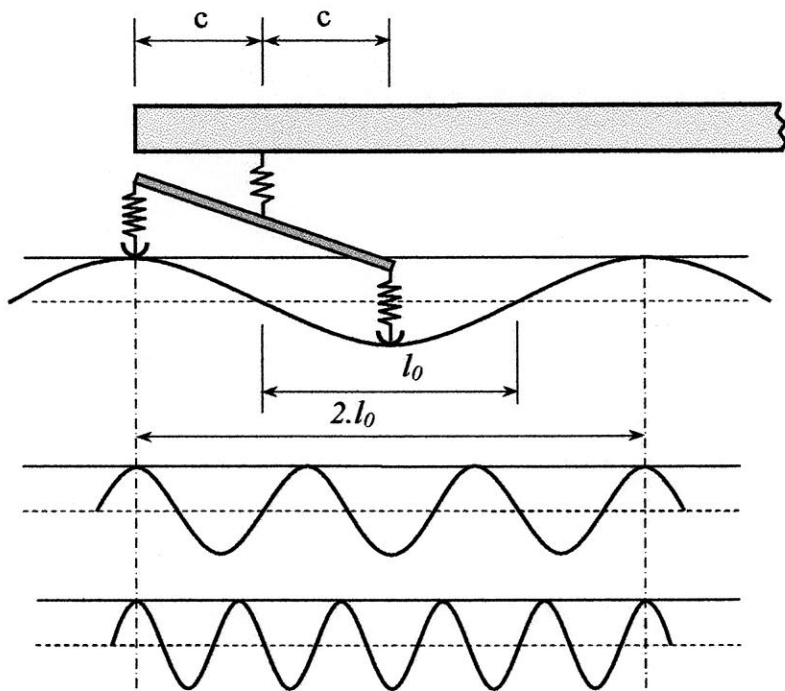


Obr. 6 Možné tvary nerovností pre PŠ1

Tab. 2 Číselné hodnoty  $l_0$ ,  $2.l_0$ ,  $\omega_{(i)}$ ,  $V_{(i)}$  pre PŠ1

$l_0$ [m]	0,66	0,33	0,22
$2.l_0$ [m]	1,32	0,66	0,44
$\omega_{(1)}$ [rad/s]	8,53245149		
$V_{(1)}$ [km/h]	6,4531	3,2265	2,1510
$\omega_{(2)}$ [rad/s]	11,58798911		
$V_{(2)}$ [km/h]	8,7640	4,3820	2,9213
$\omega_{(3)}$ [rad/s]	56,47640779		
$V_{(3)}$ [km/h]	42,7133	21,3566	14,2377
$\omega_{(4)}$ [rad/s]	67,29528193		
$V_{(4)}$ [km/h]	50,8957	25,4478	16,9652
$\omega_{(5)}$ [rad/s]	77,82929062		
$V_{(5)}$ [km/h]	58,8626	29,4313	19,6208

2. prípadová štúdia (PŠ2) predpokladá, že dĺžky kosínusových vĺn sú rovné podielom dvojnásobnej vzdialenosti kolies zadnej dvojnápravy vozidla  $2.(2.c) = 2.(2.0,66) = 2,64$  m, čo by mohlo vyvolať vznik zvýšených dynamických účinkov na vozidlo, respektíve vznik rezonančného kmitania zadnej dvojnápravy vozidla pri jej pozdĺžnom nakláňaní, obrázok 7. Číselné hodnoty možných dĺžok kosínusových vĺn  $2.l_0$ , hodnoty vlastných uhlových frekvencií  $\omega_{(i)}$  a im zodpovedajúce hodnoty kritických rýchlostí  $V_{(i)}$  pre tento prípad sú v tabuľke 3.

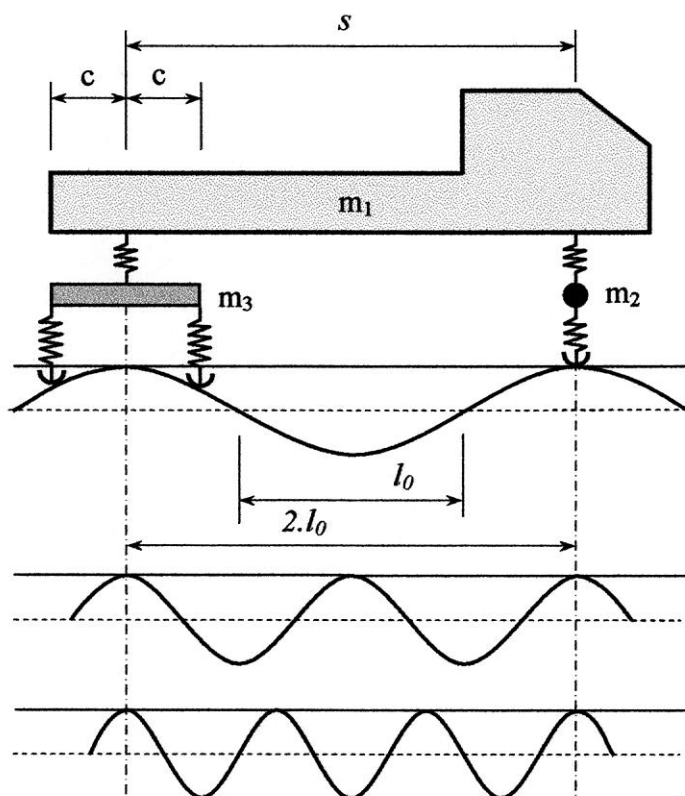


**Obr. 7** Možné tvary nerovností pre PŠ2

**Tab. 3** Číselné hodnoty  $l_0$ ,  $2.l_0$ ,  $\omega_{(i)}$ ,  $V_{(i)}$  pre PŠ2

$l_0$ [m]	1,32	0,44	0,264
$2.l_0$ [m]	2,64	0,88	0,528
$\omega_{(1)}$ [rad/s]	8,53245149		
$V_{(1)}$ [km/h]	12,9062	4,3020	2,5812
$\omega_{(2)}$ [rad/s]	11,58798911		
$V_{(2)}$ [km/h]	17,5281	5,8426	3,5056
$\omega_{(3)}$ [rad/s]	56,47640779		
$V_{(3)}$ [km/h]	85,4266	28,4755	17,0853
$\omega_{(4)}$ [rad/s]	67,29528193		
$V_{(4)}$ [km/h]	101,7914	33,9304	20,3582
$\omega_{(5)}$ [rad/s]	77,82929062		
$V_{(5)}$ [km/h]	117,7252	39,2417	23,5451

3. prípadová štúdia (PŠ3) predpokladá, že dĺžky kosínusových vĺn sú rovné podielom vzdialenosti stredov prednej a zadnej nápravy vozidla  $s = 4,35$  m, čo by mohlo vyvolať vznik zvýšených dynamických účinkov na vozidlo, respektíve vznik rezonančného kmitania odpruženej hmoty  $m_1$  vozidla pri jej vertikálnych pohyboch, obrázok 8. Číselné hodnoty možných dĺžok kosínusových vĺn  $2.l_0$ , hodnoty vlastných uhlových frekvencií  $\omega_{(i)}$  a im zodpovedajúce hodnoty kritických rýchlostí  $V_{(i)}$  pre tento prípad sú v tabuľka 4.

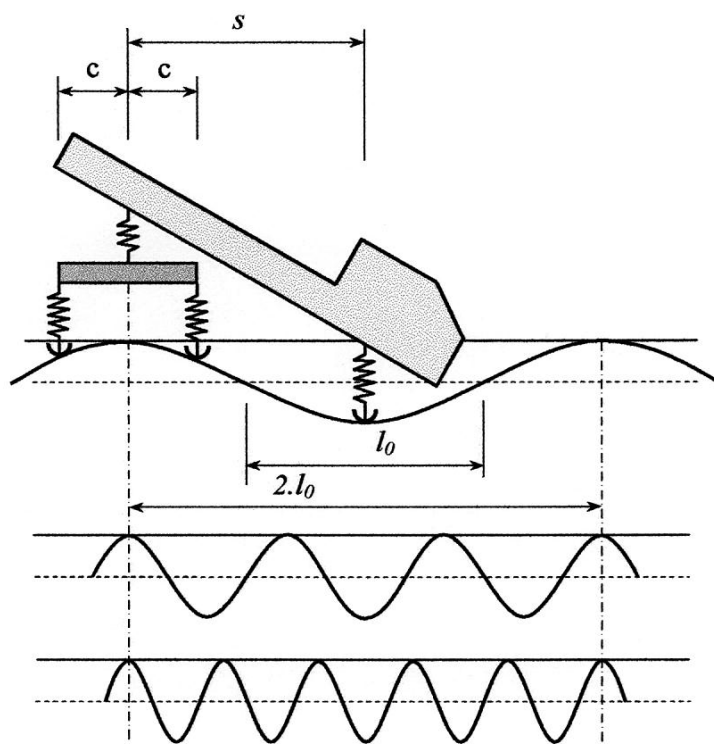


Obr. 8 Možné tvary nerovností pre PŠ3

Tab. 4 Číselné hodnoty  $l_0$ ,  $2.l_0$ ,  $\omega_{(i)}$ ,  $V_{(i)}$  pre PŠ3

$l_0$ [m]	2,175	1,0875	0,7250	0,5437	0,4350	0,3625	0,3107	0,2718	0,2416
$2.l_0$ [m]	4,3500	2,1750	1,4500	1,0875	0,8700	0,7250	0,6214	0,5437	0,4833
$\omega_{(1)}$ [rad/s]	8,53245149								
$V_{(1)}$ [km/h]	21,265	10,632	7,0886	5,3164	4,2531	3,5443	3,0379	2,6582	2,3628
$\omega_{(2)}$ [rad/s]	11,58798911								
$V_{(2)}$ [km/h]	28,881	14,440	9,6271	7,2203	5,7763	4,8135	4,1259	3,6101	3,2090
$\omega_{(3)}$ [rad/s]	56,47640779								
$V_{(3)}$ [km/h]	140,75	70,379	46,919	35,189	28,151	23,459	20,108	17,594	15,639
$\omega_{(4)}$ [rad/s]	67,29528193								
$V_{(4)}$ [km/h]	167,72	83,862	55,908	41,931	33,544	27,954	23,960	20,965	18,636
$\omega_{(5)}$ [rad/s]	77,82929062								
$V_{(5)}$ [km/h]	193,97	96,989	64,659	48,494	38,795	32,329	27,711	24,247	21,553

4. prípadová štúdia (PŠ3) predpokladá, že dĺžky kosínusových vĺn sú rovné podielom dvojnásobnej vzdialenosti stredov prednej a zadnej nápravy vozidla  $2.s = 2.4,35 = 8,70$  m, čo by mohlo vyvolať vznik zvýšených dynamických účinkov na vozidlo, respektíve vznik rezonančného kmitania odpruženej hmoty  $m_1$  vozidla pri jej natáčení v pozdĺžnom smere, obrázok 9. Číselné hodnoty možných dĺžok kosínusových vĺn  $2.l_0$ , hodnoty vlastných uhlových frekvencií  $\omega_{(i)}$  a im zodpovedajúce hodnoty kritických rýchlostí  $V_{(i)}$  pre tento prípad sú v tabuľke 5.



**Obr. 9** Možné tvary nerovností pre PŠ4

**Tab. 5** Číselné hodnoty  $l_0$ ,  $2.l_0$ ,  $\omega_{(i)}$ ,  $V_{(i)}$  pre PŠ4

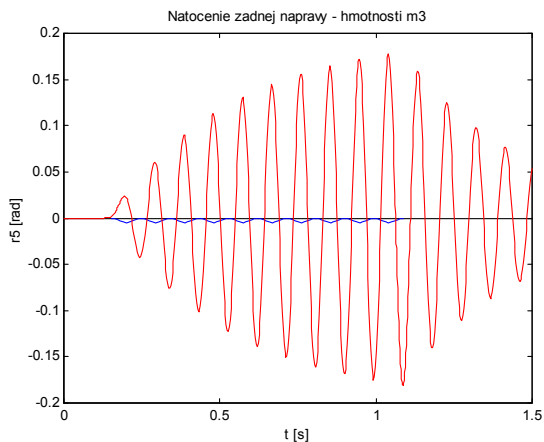
$l_0$ [m]	4,3500	1,4500	0,8700	0,6214	0,4833	0,3954	0,3346	0,2900	0,2558
$2.l_0$ [m]	8,7000	2,9000	1,7400	1,2428	0,9666	0,7909	0,6692	0,5800	0,5117
$\omega_{(1)}$ [rad/s]	8,53245149								
$V_{(1)}$ [km/h]	42,531	14,177	8,5063	6,0759	4,7257	3,8665	3,2716	2,8354	2,5018
$\omega_{(2)}$ [rad/s]	11,58798911								
$V_{(2)}$ [km/h]	57,763	19,254	11,552	8,2518	6,4181	5,2511	4,4433	3,8508	3,3978
$\omega_{(3)}$ [rad/s]	56,47640779								
$V_{(3)}$ [km/h]	281,51	93,839	56,303	40,217	31,279	25,592	21,655	18,767	16,559
$\omega_{(4)}$ [rad/s]	67,29528193								
$V_{(4)}$ [km/h]	335,44	111,81	67,089	47,921	37,272	30,495	25,803	22,363	19,732
$\omega_{(5)}$ [rad/s]	77,82929062								
$V_{(5)}$ [km/h]	387,95	129,31	77,591	55,422	43,106	35,268	29,842	25,863	22,821

#### 4 ZÁVĚR

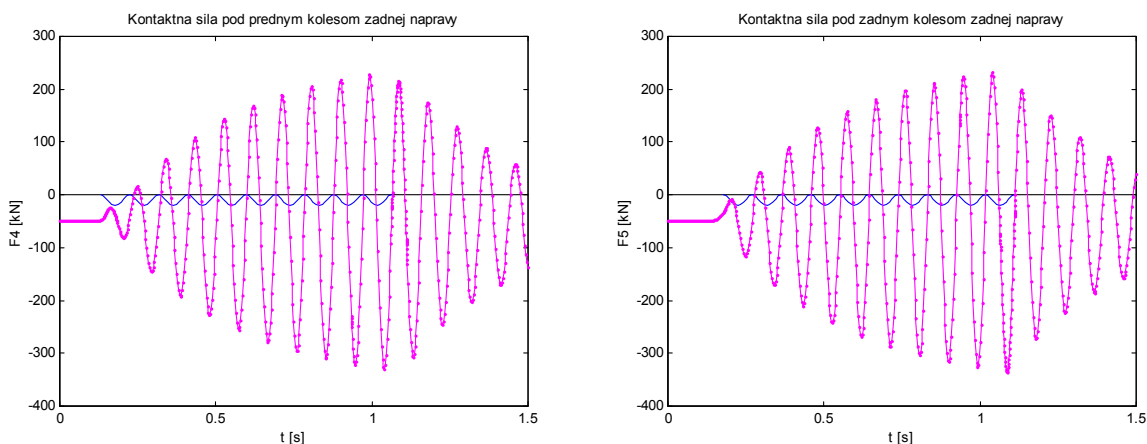
Periodicky sa opakujúce nerovnosti povrchu jazdnej dráhy majú určité špecifické postavenie, nakoľko pri jazde vozidla po takýchto nerovnostiach určitými kritickými rýchlosťami dochádza k zvýšeniu dynamických účinkov na vozovku. Za určitých podmienok môže dôjsť aj k vzniku rezonančného kmitania. Táto skutočnosť je dokumentovaná na obrázku 10 a 11, kde sú zobrazené časové priebehy kmitania veličiny  $r_5$  (zatáčanie zadnej dvojnápravy) a veličín  $F_4$  a  $F_5$  (kontaktné sily pod predným a zadným kolesom zadnej dvojnápravy) pri jazde po periodicky sa opakujúcich



nerovnostiach v tvare kosínusových vln s dĺžkou  $2.l_0 = 2,64$  m, pri rýchlosti pohybu vozidla  $V_{(4)} = 101,7914$  km/h, PŠ2.



**Obr. 10** PŠ2, časový priebeh kmitania veličiny  $r_5$  v rezonancii



**Obr. 11** PŠ2 časový priebeh kontaktných síl  $F_4$  a  $F_5$  v rezonancii

Je nutné poznamenať, že pre vznik rezonančného javu nie je dôležitý tvar nerovností ale frekvencia ich výskytu. Veľkosť kritickej rýchlosti súvisí s dĺžkou vlny nerovnosti. Dlhším vlnám zodpovedajú vyššie kritické rýchlosti, kratším vlnám zodpovedajú nižšie kritické rýchlosti. Typické periodicky sa opakujúce nerovnosti, tzv. rolety, objavujúce sa pred križovatkami, vznikajú pri zastavovaní ťažkých nákladných vozidiel, teda pri malých rýchlostiach a kopírujú rozmery pneumatík. Ich vlnové dĺžky korešpondujú prevládajúcim vlastným frekvenciám pohybujúcich sa vozidiel. Aby koleso s polomerom  $r$  mohlo kopírovať jazdnú dráhu a nastával teoreticky len jednobodový dotyk, musia byť podľa [2] medzi parametrami  $r$ ,  $h_0$ ,  $l_0$  (polomer kolesa, výška a dĺžka polvlny) dodržané určité vzájomné relácie.

## POĎAKOVANIE

*Tento príspevok vznikol vďaka podpore v rámci OP Výskum a vývoj pre projekt „Centrum excelentnosti pre dopravné stavitelstvo“ (ITMS26220120027) spolufinancovaný zo zdrojov Európskeho fondu regionálneho rozvoja.*

## LITERATÚRA

- [1] Surface characteristics. *Technical report No. 1*. XVIIIth World Road Congress, Brussels, 1987.
- [2] CEBON, D.: *Handbook of Vehicle-Road Interaction*. Swets and Zeitlinger Publishers, Lisse, the Netherlands, 1999.
- [3] STACHOVÁ, D.: O jednom probléme pri riešení interakcie v systéme vozidlo – jazdná dráha. *Proceedings of the International Conference on Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering, DYN-WIND'2003*, Slovak Republic, Tále, Hotel Stupka, May 19-22, 2003, p. 178-181.

### **Oponentní posudek vypracoval:**

Ing. Stanislav Pospíšil, Ph.D., ÚTAM Praha.